

文章编号: 1000-8055(2006)02-0366-08

滚动轴承非线性轴承力及其对轴承系统振动特性的影响

唐云冰, 高德平, 罗贵火

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 滚动轴承在旋转机械中应用及其广泛, 其振动特性对旋转机械的正常运行有很大影响。本文基于赫兹弹性接触理论和滚动轴承运动学, 推导了滚动轴承在工作状态下产生的非线性轴承力, 并在此基础上对滚动轴承系统的振动特性进行了分析。研究结果表明: 滚动轴承的非线性轴承力会诱发变刚度振动。系统响应中存在多种周期(谐波、次谐波和超谐波)和非周期(拟周期和混沌)响应。通过频谱图、Poincaré图和分叉图, 分析了滚动轴承系统在不同参数下的周期分叉特性。当非线性轴承力和不平衡力共同作用时, 滚动轴承系统会产生组合振动, 随着不平衡力的增大变刚度振动所对应频率的幅值逐渐降低。

关键词: 航空、航天推进系统; 滚动轴承; 非线性轴承力; 变刚度振动

中图分类号: V 231.96

文献标识码: A

Non-Linear Bearing Force of the Rolling Ball Bearing and Its Influence on Vibration of Bearing System

TANG Yun-bing, GAO De-ping, LUO Gui-huo

(College of Energy & Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Rolling ball bearing is widely used to support rotors. It is a non-negligible source of vibration in many types of rotating machines, so the vibration characteristics of the rolling ball bearing system is worth to be investigated. Hertz elastic contact theory and bearing kinematics theory were applied to calculate the force caused by the rolling ball bearing. The non-linear vibration of rotors supported by the rolling ball bearing was studied. It was found that the non-linear bearing force excited the varying compliance vibration. Many kinds of periodic (synchronous, sub-and super-synchronous) and non-periodic (quasi-periodic and chaotic) responses exist in the system. The periodic bifurcation behavior of the system was analyzed by means of spectrum diagrams, Poincaré maps and bifurcation diagrams. When non-linear bearing force and unbalance force act simultaneously, combined vibration will be generated. With the increase of unbalance force, the varying compliance vibration will be weakened.

Key words: aerospace propulsion system; rolling ball bearing; non-linear bearing force; varying compliance vibration

收稿日期: 2005- 05- 23; **修订日期:** 2005- 12- 20

基金项目: 国防基础科研基金资助(01B52008)

作者简介: 唐云冰(1979-), 男, 四川成都人, 南京航空航天大学能源与动力学院博士生, 主要从事转子动力学的研究

旋转机械正朝着高转速、高稳定性的方向发展, 支承对转子系统动力特性的影响非常显著。滑动轴承的动力特性已经有了比较深入的研究成果^[1, 2], 然而对于工程中广泛应用的滚动轴承动力特性的研究还不多。这主要是由于滚动轴承结构和运动的复杂性, 使得符合实际的数学模型较难建立^[3]。

本文在赫兹接触理论基础上, 结合滚动轴承运动规律, 在一定假设条件下, 推导了滚动轴承在工作状态下产生的非线性轴承力, 建立了滚动轴承系统的分析模型, 用数值方法对建立的振动方程进行求解, 并对计算结果进行了分析。

1 滚动轴承的赫兹弹性接触理论

1895年, 赫兹(Hertz H)研究了2个弹性体间的接触问题, 确立了弹性接触理论。在求解接触面应力分布时, 采用了如下假设:

- (1) 接触物体间的弹性变形服从虎克定律;
- (2) 负荷垂直于接触表面, 接触区不存在摩擦;
- (3) 接触面的尺寸与接触物体表面的曲率半径相比很小。

对于滚动轴承的接触问题, 上述假设基本成立, 实践证明赫兹弹性接触理论对于滚动轴承的分析, 具有足够计算精度, 因此它是滚动轴承应力计算的主要依据之一^[4]。本文以点接触的深沟球轴承为例进行分析。

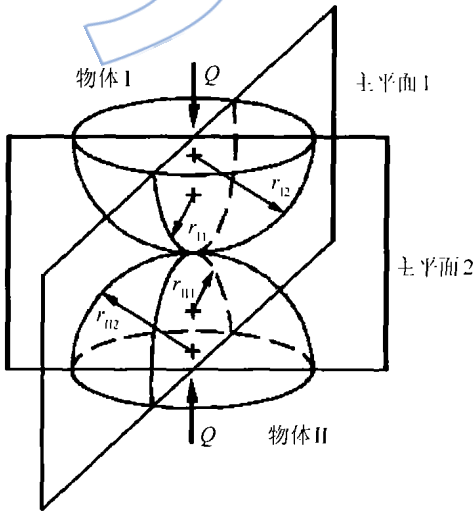


图1 物体与物体间的点接触

Fig 1 The point-contact between object and object

图1为两个点接触的物体, 其中 r 表示半径,

它的倒数即为接触点的曲率 ρ 。一个任意曲面体, 通过接触点不同平面的曲率是不同的。最大曲率和最小曲率统称为主曲率, 主曲率所在的平面称为主平面。定义两接触物体在接触点处两互相垂直直面上主曲率的总和为主曲率和, 可表示为:

$$\sum \rho = \rho_{I1} + \rho_{II1} + \rho_{I2} + \rho_{II2} \quad (1)$$

式中: 下标“ I, II ”表示接触体, “ 1, 2 ”表示主平面。

主曲率函数可表示为:

$$F(\rho) = \frac{|(\rho_{I1} - \rho_{II1}) + (\rho_{I2} - \rho_{II2})|}{\sum \rho} \quad (2)$$

点接触的滚动轴承, 在负荷作用下, 接触点扩展成一个接触面。该接触面与接触法线垂直平面内的投影为一椭圆, 长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 。在接触区内, 接触应力按半椭球分布如图2所示。

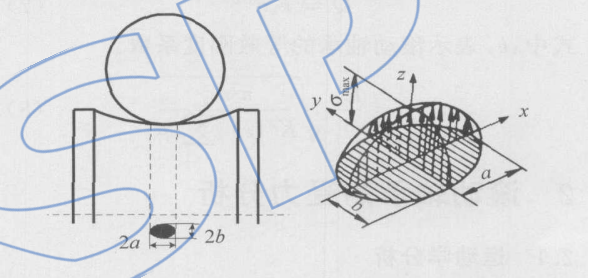


图2 滚动体与滚道的接触椭圆

Fig 2 The contact ellipse between the rolling element and race

接触椭圆的长、短轴半轴系数可分别表示为:

$$a = m_a \sqrt{\frac{3Q}{\sum \rho} \cdot \frac{1}{E}}, \quad (3)$$

$$b = m_b \sqrt{\frac{3Q}{\sum \rho} \cdot \frac{1}{E}}, \quad (4)$$

式中:

Q 为滚动体与内、外圈的接触负荷;

$m_a = \sqrt{\frac{2L(e)}{\pi k^2}}$ 为接触椭圆的长轴系数;

$m_b = \sqrt{\frac{2L(e)k}{\pi}}$ 为接触椭圆的短轴系数;

$k = b/a$ 为椭圆率;

$e = \sqrt{1 - k^2}$ 为椭圆偏心率;

$$L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

为与椭圆偏心率 e 有关的第二类椭圆积分;

E 为当量弹性模量:

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)$$

其中: E_1, E_2 和 ν_1, ν_2 分别为接触两物体的弹性模量和泊松比。

最大接触应力为:

$$\sigma_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{\pi a b} \quad (5)$$

接触点的弹性变形量为:

$$\delta = \frac{2K(e)}{\pi m_a} \sqrt{\frac{1}{8} \left(\frac{3}{E} \right)^2 Q^2 \sum \rho} \quad (6)$$

式中:

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

为与椭圆偏心率 e 有关的第一类椭圆积分。

由式(6)可得滚动轴承的力与位移关系为:

$$Q = k_p \delta^{3/2} \quad (7)$$

式中: k_p 表示滚动轴承的等效刚度系数。

$$k_p = \frac{E'}{3} \sqrt{\frac{\pi m_a^3}{K^3(e) \sum \rho}} \quad (8)$$

2 滚动轴承的受力分析

2.1 运动学分析

滚动轴承内、外圈与滚动体之间的相对运动, 对其力学性能有重要影响。通常有两种分析方法: 一是根据圆周线速度进行计算; 另一种是将轴承当作差动行星齿轮装置进行计算^[5]。

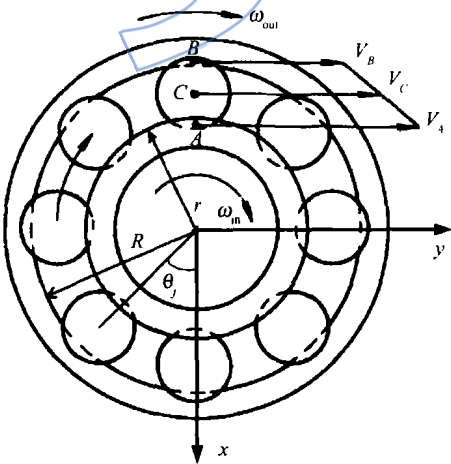


图3 滚动轴承运动示意图

Fig 3 The movement sketch map of the ball bearing

由于第一种分析方法较为简单且容易理解, 本文采用这种方法。滚动轴承内各部件的运动关

系如图3所示。 V_A 和 V_B 分别表示滚动体在接触点处的速度。假设滚动体与滚道之间为纯滚动(即不发生相对滑动), 可得下式:

$$V_A = V_{in} = \omega_{in} r$$

$$V_B = V_{out} = \omega_{out} R \quad (9)$$

$$V_c = \frac{V_A + V_B}{2} = \frac{V_{in} + V_{out}}{2} \quad (10)$$

式中: r 表示内圈滚道的半径; R 表示外圈滚道的半径; V_{in} 表示内圈的速度; V_{out} 表示外圈的速度; V_c 表示滚动体的公转速度; ω_{in} 表示内圈的角速度; ω_{out} 表示外圈的角速度。

在实际计算时, 进一步假设滚动轴承的内圈与转轴固结一起转动, 外圈与轴承座固结不转动, 可得^[6]:

$$\omega_{in} = \omega, \quad \omega_{out} = 0 \quad (11)$$

式中: ω 为转轴的角速度。

由公式(10)、(11)可得滚动体的公转角速度为:

$$\omega = \frac{V_c}{(r + R)/2} = \frac{\omega r}{r + R} \quad (12)$$

2.2 非线性轴承力

根据图3可知, 第 j 个滚动体在时间 t 时转动的角度可表示为:

$$\theta_j = \frac{2\pi}{N_b} (j - 1) + \omega t$$

$$j = 1, 2, \dots, N_b \quad (13)$$

式中: N_b 表示滚动体数目。

因此, 第 j 个滚动体的弹性接触变形可表示为:

$$\delta_{\theta_j} = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j \quad (14)$$

式中: x, y 别表示轴承内圈中心点在垂直方向和水平方向的位移。

考虑径向游隙 γ 时, 弹性接触变形可表示为:

$$\delta_{\theta_j} = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - \gamma \quad (15)$$

将公式(15)代入公式(7), 可得第 j 个滚动体与内、外环的接触力可表示为:

$$Q_{\theta_j} = k_p (\delta_{\theta_j})_+^{3/2}$$

$$j = 1, 2, \dots, N_b \quad (16)$$

其中: 下标“+”表示当 $\delta_{\theta_j} \leq 0$ 时, 滚动体与滚道不接触, 接触弹性变形为0; 当 $\delta_{\theta_j} > 0$ 时, 接触弹性变形为 δ_{θ_j} 。

根据公式(16)可得滚动轴承的非线性轴承力, 并将其分解到 x, y 两个方向, 可表示为:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = k_p \sum_{j=1}^{N_b} (\delta_{\theta_j})_+^{3/2} \begin{bmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{bmatrix}$$

(17)

一般认为滚动轴承的交叉刚度很小可以忽略不计, 由式(17)可得轴承的刚度为:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{3}{2} k_p \sum_{j=1}^{N_b} (\delta_{\theta_j})_+^{1/2} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_j \\ \sin^2 \theta_j \end{bmatrix}$$

(18)

3 滚动轴承的振动分析

滚动轴承的振动主要有3类:

3.1 结构的固有振动

固有频率可表示为:

$$\begin{cases} f_x = (1/2\pi) \sqrt{K_x/M} \\ f_y = (1/2\pi) \sqrt{K_y/M} \end{cases}$$

(19)

式中: M 表示轴承系统的质量。

3.2 不平衡力引起的振动

不平衡力引起的振动频率与转轴转动的频率相等, 即:

$$f = \omega/2\pi$$

(20)

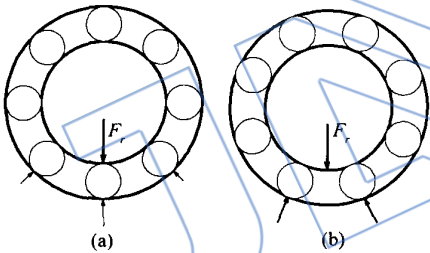


图4 滚珠在不同时刻的承载情况

Fig 4 The load of the ball in different time

3.3 滚动体通过载荷区引起的振动

由于滚动体依次地通过载荷区, 在径向负荷 F_r 的作用线下方有滚动体(如图4(a))和无滚动体时(如图4(b)), 径向刚度不相等而产生的。当内圈转动时, 滚动体每通过载荷的作用线一次, 就产生一次周期性的振动, 称为变刚度振动^[7]。变刚度振动是承受径向载荷的滚动轴承普遍存在的。它是轴承载荷引发且呈现出非线性特性。其频率与滚动体的数目和滚动体的公转角速度有关, 可用下式表示为:

$$f_{vc} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega N_b}{2\pi}$$

(21)

根据Lagrange 方程, 建立图5所示滚动轴承系统的振动方程, 可表示为:

$$\begin{cases} M \ddot{x} + C \dot{x} + Q_x = F_r \\ M \ddot{y} + C \dot{y} + Q_y = 0 \end{cases}$$

(22)

式中: M 表示轴承系统的质量; C 表示轴承系统的阻尼; F_r 表示轴承径向力。

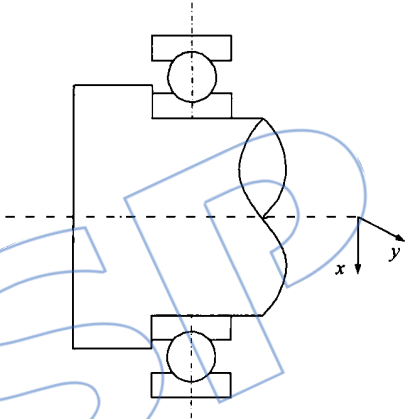


图5 滚动轴承系统示意图

Fig 5 The sketch map of the ball bearing system

4 计算结果及讨论

以某深沟球轴承为例进行分析。计算的主要初始参数为: $N_b = 8$; $R = 19.98 \text{ mm}$; $r = 14.55 \text{ mm}$; 滚动体直径: 5.43 mm ; 外圈滚道的沟曲率直径: 2.83 mm ; 内圈滚道的沟曲率直径: 2.79 mm 。接触角: 0° ; $\gamma = 20 \text{ }\mu\text{m}$, $M = 1 \text{ kg}$, $C = 300 \text{ N s/m}$, $F_r = 5 \text{ N}$ 。

根据已知条件, 采用Newmark- β 积分法, 求解公式(22)可得系统的稳态响应。

4.1 非线性轴承力下轴承的振动特性

为了研究非线性轴承力对系统振动特性的影响, 假设不平衡力为零(即 $e = 0$), 这样系统的激励力只有一个。利用Poincaré图和分叉图, 分析系统的周期分叉特性。Poincaré映射的采样周期为变刚度的振动频率 f_{vc} 。

4.1.1 响应随转速的变化

转速是影响系统运动振动特性的重要因素之一。系统在不同转速下将表现出不同的振动特性。图6表示了随转速变化的位移分叉图, 可以看出:

(1) 由于非线性轴承力的存在, 随着转速的增加, 系统响应中存在多种周期(谐波、次谐和超谐波)和非周期(拟周期和混沌)的响应形式;

(2) 当转速为1 280 r/m in 时, 系统发生了周期分叉, 由1周期变为2周期; 当转速为2 500 r/m in 时, 系统又由2周期变为1周期的振动;

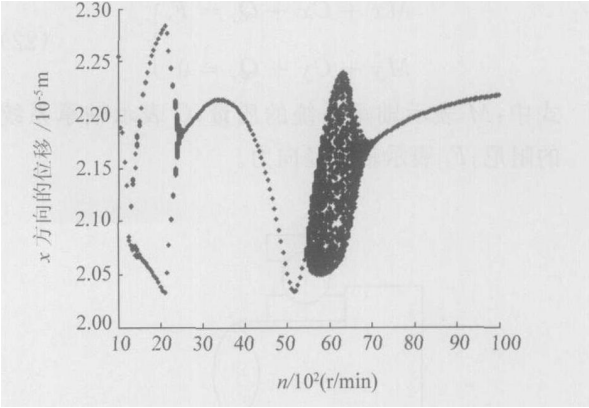


图6 随转速变化的位移分叉图

Fig 6 The displacement bifurcation figure veering with speed

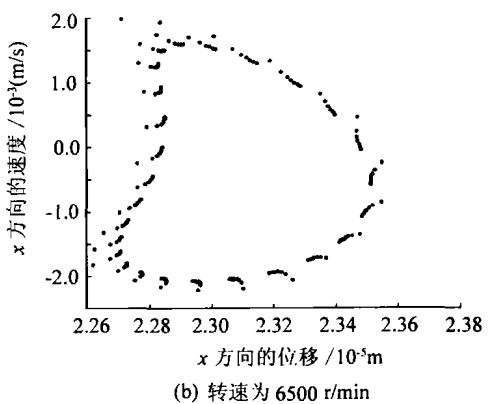
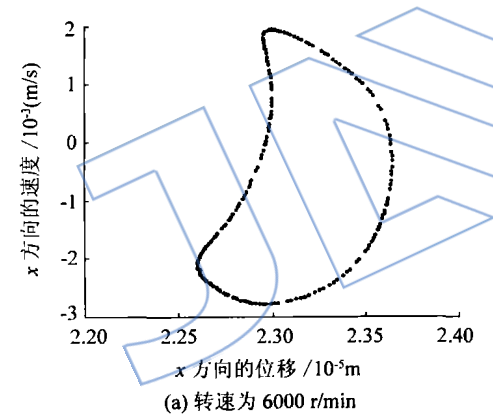


图7 不同转速下的 Poincaré 图

Fig 7 The Poincaré figure in different speed

(3) 当转速在5 350~ 7 000 r/m in 之间时, 系

统进入非周期(拟周期和混沌)振动; 当转速大于7 000 r/m in 时, 系统是1周期的振动。

图7表示了系统在不同转速下的 Poincaré 图。可以看出: 当转速为6 000 r/m in 时, Poincaré 图是封闭的曲线, 系统处于拟周期状态; 当转速为6 500 r/m in 时, 系统已经进入混沌状态。因此, 随着转速增加, 系统是以拟周期分叉进入混沌状态的。

4 1 2 响应随径向力的变化

随着径向力的增加, 位移将逐渐增大, 使得位移分叉图的表现效果不明显。因此, 分析响应随径向力变化时, 采用速度分叉图代替位移分叉图。

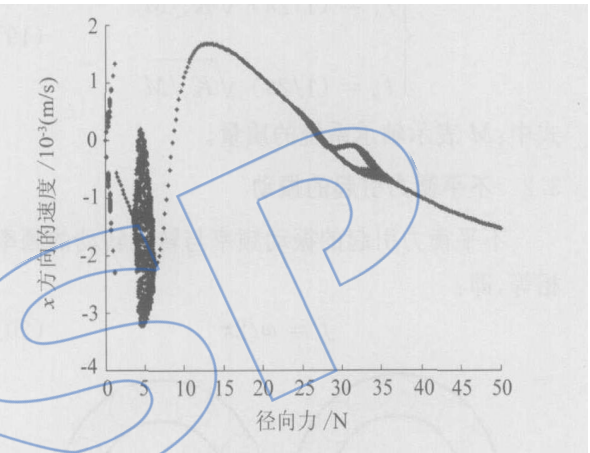


图8 随径向力变化的速度分叉图

Fig 8 The speed bifurcation figure varying with radial force

图8表示了转速为6 000 r/m in 时, 不同径向力下系统的速度分叉图。可以看出:

- (1) 当径向力为1.25 N 时, 响应由2周期变为1周期;
- (2) 当径向力在3.4~ 6.7 N 之间时, 响应为非周期振动;
- (3) 当径向力为28.75 N 时, 系统发生周期分叉, 由1周期变为2周期;
- (4) 当径向力为35.8 N 时, 由2周期变为1周期。

因此, 采用适当的径向力可以避免轴承非线性力产生的非周期振动。

4 1 3 响应随游隙的变化

游隙是滚动轴承的主要结构参数之一, 它对振动特性将产生重要的影响。

图9表示了转速为6 000 r/m in 时, 不同游隙下系统的速度分叉图。可以看出:

- (1) 当游隙小于17.2 μm 时, 响应为1周期的振动;

(2) 当游隙在 $17.2\sim 33.2\text{ }\mu\text{m}$ 之间时, 响应为非周期振动;

(3) 当游隙为 $73.6\text{ }\mu\text{m}$ 时, 系统发生了周期分叉, 由1周期变为2周期.

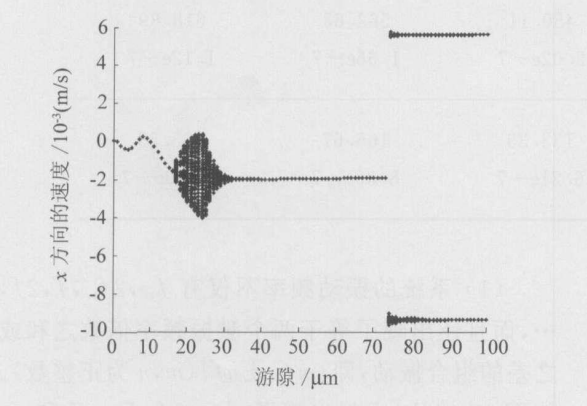


图9 随游隙变化的速度分叉图

Fig 9 The displacement bifurcation figure varying with internal radial clearance

因此, 采用适当的游隙可以避免轴承非线性力产生的非周期振动.

4 1 4 响应随阻尼的变化

阻尼的改变也会影响轴承系统的振动特性, 导致出现多种周期和非周期响应.

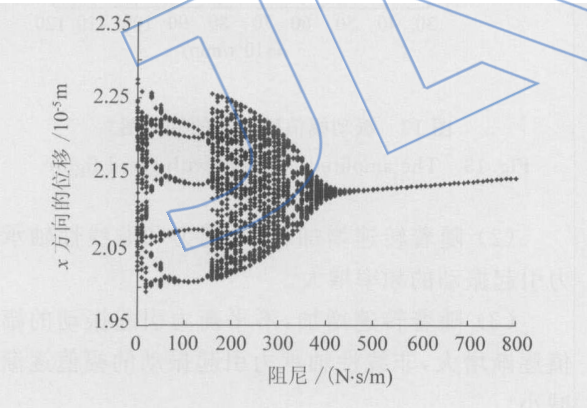


图10 随阻尼变化的位移分叉图

Fig 10 The displacement bifurcation figure varying with damp

图10表示了转速为 $6\text{ }000\text{ r/min}$ 时, 不同阻尼下系统的位移分叉图. 可以看出:

(1) 当阻尼在 $0\sim 45\text{ N s/m}$ 之间时, 响应为非周期振动;

(2) 当阻尼在 $45\sim 151\text{ N s/m}$ 之间时, 响应为5周期的振动;

(3) 当阻尼在 $151\sim 424\text{ N s/m}$ 之间时, 响应为非周期振动;

(4) 当阻尼大于 424 N s/m 时, 响应为1周期的振动.

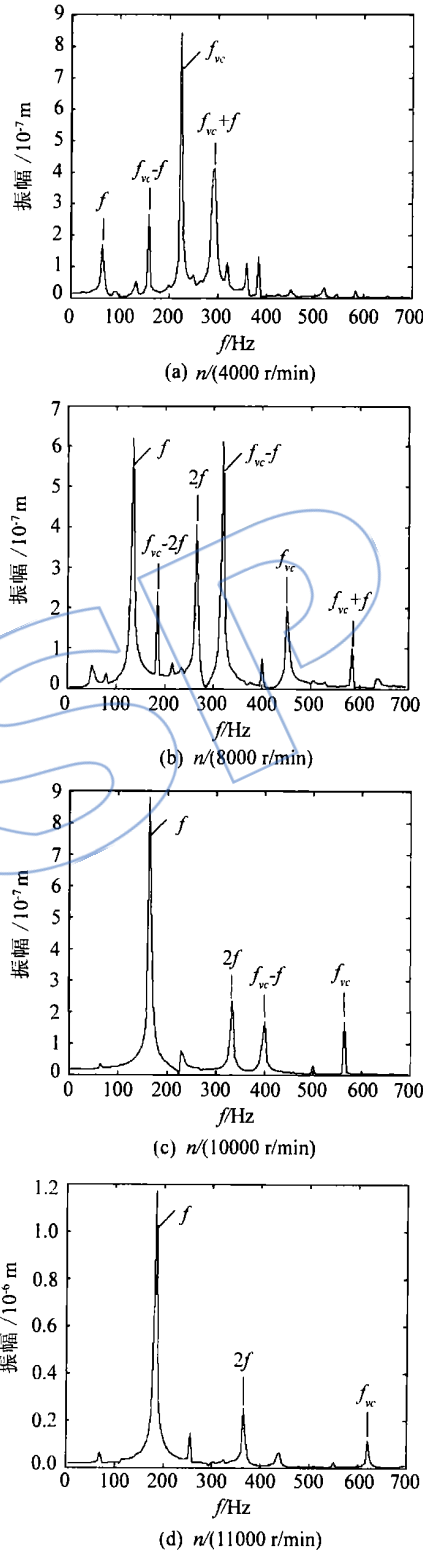


图11 随转速变化的频谱图

Fig 11 The spectrum figure varying with speed

因此, 在非线性的滚动轴承系统中, 阻尼并不总是对振动有抑制作用. 随着阻尼的增大, 周期响

表1 不同转速对应的振动幅值和频率

Table 1 The amplitude and frequency in different speed

转速/(r/min)		4 000	8 000	10 000	11 000
非线性 轴承力	频率/Hz	225.05	450.11	562.63	618.89
	幅值/m	8.42e- 7	2.02e- 7	1.66e- 7	1.12e- 7
不平 衡力	频率/Hz	66.67	133.33	166.67	183.33
	幅值/m	1.67e- 7	6.21e- 7	8.80e- 7	11.69e- 7

应和非周期响应交错出现.在一定范围内随着阻尼增大,系统从5周期进入非周期振动;只有当阻尼足够大时,响应才会稳定在1周期.

4 2 不平衡力和非线性轴承力同时作用下
轴承系统的振动特性

实际的滚动轴承系统总有一定不平衡量,这样系统将同时受到两个激振力的作用.根据公式(22)可得:

$$\begin{cases} M \ddot{x} + C \dot{x} + Q_x = F_r + M e_1 \omega^2 \cos \omega t \\ M \ddot{y} + C \dot{y} + Q_y = M e_1 \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (24)$$

式中: e_1 表示不平衡量的偏心距.

公式(23)表示的是不平衡力和非线性轴承力同时作用时轴承系统的振动方程.为了研究这两种激振力的相互影响,计算时选取的转速尽量避开非周期振动对应的转速.假设不平衡量的偏心距 $e_1=0.05\text{ mm}$.

图11表示了在不同转速下,滚动轴承系统的频谱图.表1表示了不同频率对应的幅值.

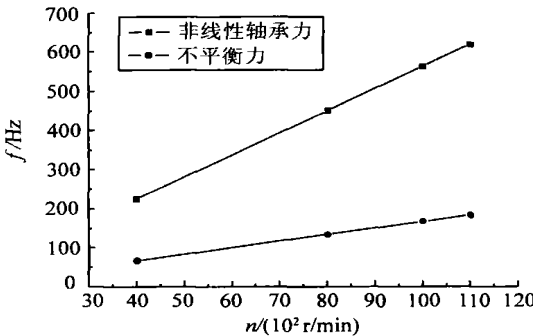


图12 振动频率随转速的变化图

Fig 12 The frequency varying with speed figure

图12表示了系统振动频率随转速的变化情况.图13表示了系统振动幅值随转速的变化情况.可以看出:

(1) 系统的振动频率不仅有 $f_{vc}, 2f_{vc}, f, 2f, \dots$, 而且还出现了等于两个激振频率倍数之和或之差的组合振动,即 $|mf_{vc} \pm nf|$ (m, n 为正整数).如图11的(b)中就出现了 $f_{vc}-2f, f_{vc}-f$ 和 $f_{vc}+f$ 等频率成分.

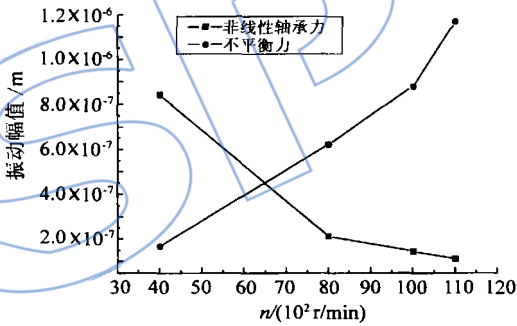


图13 振动幅值随转速的变化图

Fig 13 The amplitude varying with speed figure

(2) 随着转速增加,不平衡力和非线性轴承力引起振动的频率增大.

(3) 随着转速增加,不平衡力引起振动的幅值逐渐增大,非线性轴承力引起振动的幅值逐渐减小.

5 结 论

基于赫兹弹性接触理论和滚动轴承运动学,推导了滚动轴承运转时产生的非线性轴承力.分析了非线性轴承力作用下,滚动轴承产生的变刚度振动对系统响应的影响规律.研究表明:

(1) 选取适当的参数,如转速、径向力、游隙和阻尼等,可以降低非线性轴承力引起的非周期振动,提高系统运行的平稳性.

(2) 当非线性轴承力和不平衡力共同作用时,滚动轴承系统会产生组合振动,随着不平衡力

增大, 变刚度振动所对应频率的幅值逐渐降低。

参考文献

- [1] 丁千, 陈予恕, 曹树谦. 滑动轴承-转子系统动力学研究若干成果[J]. 非线性动力学学报, 2003, 10(1): 33~41.
Ding Qian, Chen Yu-shu, Cao Shuqian. Some Achievements on Dynamics of Rotor/Bearing Systems [J]. *Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 2003, 10(1): 33~41.
- [2] 焦映厚, 陈照波, 夏松波, 等. 转子——非圆轴承系统非线性动力学行为的研究[J]. 航空动力学报, 2000, 15(4): 413~418.
Jiao Yinghou, Chen Zhaobo, Xia Songbo, et al. Study on Nonlinear Dynamic Behavior of Rotor-Non-Circular Bearing System [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2000, 15(4): 413~418.
- [3] Liew A, Feng N, Hahn E J. Transient Rotor Dynamic Modeling of Rolling Element Bearing Systems [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, (124): 984~991.
- [4] 唐云冰, 罗贵火, 章景璇, 等. 高速陶瓷滚动轴承等效刚度分析与试验[J]. 航空动力学报, 2005, 20(2): 240~244.
Tang Yubing, Luo Guihuo, Zhang Jingxuan, et al. Theoretical Analysis and Experiment of the High Speed Ceramic Rolling Bearing Equivalent Stiffness [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2005, 20(2): 240~244.
- [5] [日]冈本纯三. 球轴承的设计计算[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003: 171~179.
- [6] Harsha S P. Non-Linear Dynamic Response of a Balanced Rotor Supported on Rolling Element Bearings [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2005, (19): 551~578.
- [7] Sunnersjö C S. Varying Compliance Vibrations of Rolling Bearings [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1978, 58(3): 363~373.